**Příklad 1.** Chceme spočítat integrál

$$\int_0^4 \frac{2x+1}{2x+\sqrt{2x+1}+7}\,dx.$$

Po substituci $t=\sqrt{2x+1}$, $dx = t\,dt$ dostaneme integrál

$$\int_1^3 \frac{t^3}{t^2+t+6}\,dt.$$

Ten si pomocí dělení polynomů a standardní úpravy rozdělíme na třI části:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{t^3}{t^2+t+6}\,dt &= \int_1^3 \frac{6-5t}{t^2+t+6}\,dt + \int_1^3 t-1\,dt \\
&= -\frac{5}{2}\int_1^3 \frac{2t-\frac{12}{5}}{t^2+t+6}\,dt + \int_1^3 t-1\,dt \\
&= -\frac{5}{2}\int_1^3 \frac{2t+1}{t^2+t+6}\,dt + \frac{17}{2}\int_1^3 \frac{1}{t^2+t+6}\,dt + \int_1^3 t-1\,dt.
\end{aligned}$$

První a třetí integrál můžeme hned spočítat

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{2}\int_1^3 \frac{2t+1}{t^2+t+6}\,dt = -\frac{5}{2}\left[\log\left(t^2+t+6\right)\right]_1^3 = -\frac{5}{2}\log\frac{9}{4} = 5\log\frac{2}{3}, \\
\int_1^3 t-1\,dt = \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^3 = \frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1 = 2
\end{aligned}.$$

Na zbývající integrál použijeme doplnění na čtverec

$$\begin{aligned}
\frac{17}{2}\int_1^3 \frac{1}{t^2+t+6}\,dt = \frac{17}{2}\int_1^3 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{23}{4}}\,dt &= \frac{17}{2}\frac{4}{23}\int_1^3 \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}\,dt \\
&= \frac{17}{2}\frac{4}{23}\frac{\sqrt{23}}{2}\left[\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{23}}\right)\right]_1^3 \\
&= \frac{17}{\sqrt{23}}\left(\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{23}}\right)-\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{23}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Celkový výsledek:

$$\frac{17}{\sqrt{23}}\left(\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{23}}\right)-\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{23}}\right)\right)+5\log\frac{2}{3}+2 \approx 1.43005.$$

**Příklad 2.** Chceme spočítat délku křivky $t \mapsto (t, 2t\cos t, 2t\sin t)$, $t \in [-2, 2]$. Podle vzorečku potřebujeme spočítat integrál

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (2\cos t - 2t\sin t)^2 + (2\sin t + 2t\cos t)^2}\, dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{5 + 4t^2}\, dt$$

Asi nejpřirozenější substituce $t = \frac{\sqrt{5}}{2}\sinh x$, $dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\cosh x\ dx$ dává $4t^2 = 5\sinh^2 x$ a nové meze $\pm a$, kde $a = \operatorname{argsinh} \frac{2}{\sqrt{5}}$ a

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{5 + 4t^2}\, dt = \frac{5}{2}\int_{-a}^{a} \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \frac{5}{2}\int_{-a}^{a} \cosh^2 x\, dx.$$

Standardní per partes, resp. vzoreček a lieální substituce dávají výsledek

$$\frac{5}{2} \cdot \left[\frac{x + \sinh x \cosh x}{2}\right]_{-a}^{a}, \quad \text{resp.} \quad \frac{5}{2} \cdot \left[\frac{x + \frac{1}{2}\cosh 2x}{2}\right]_{-a}^{a}.$$

Alternativní substituce $t = \frac{\sqrt{5}}{2}\tan x$, $dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\cos^2 x}\ dx$ dává $4t^2 = 5\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ a nové meze $\pm b$, kde $b = \arctan \frac{2}{\sqrt{5}}$ a

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \sqrt{5 + 4t^2}\, dt &= \frac{5}{2}\int_{-b}^{b} \frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \frac{5}{2}\int_{-b}^{b} \frac{1}{\cos^3 x}\, dx \\ &= \frac{5}{2}\int_{-b}^{b} \frac{\cos x}{(1 - \sin^2 x)^2}\, dx \left| \begin{matrix} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{matrix} \right| = \frac{5}{2}\int_{-\sin b}^{\sin b} \frac{1}{(1 - u^2)^2}\, du\end{aligned}$$

Což dává poměrně nepěkné parciální zlomky, alternativně šlo ale postupovat per partes

$$\int_{-b}^{b} \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \left[\tan x \frac{1}{\cos x}\right]_{-b}^{b} - \int_{-b}^{b} \tan x \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \left[\tan x \frac{1}{\cos x}\right]_{-b}^{b} - \int_{-b}^{b} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x}\, dx.$$

To po substituci $u = \sin x$ už dává výsledek poměrně rychleji

$$\int_{-b}^{b} \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \left[\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right]_{-b}^{b} + \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} \frac{1}{\cos x}\, dx = \left[\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right|\right]_{-b}^{b}$$

Integrál lze rovněž spočítat pomocí Eulerových substitucí $\sqrt{5 + 4t^2} = u + 2t$ a $\sqrt{5 + 4t^2} = \sqrt{5} + ut$, nebo i přímo per partes. Po dosazení mohl výsledek (po úpravách) vyjít například

$$2\sqrt{21} + \frac{5}{2}\operatorname{argsinh}\frac{4}{\sqrt{5}}, \quad 2\sqrt{21} + \frac{5}{4}\log\frac{\sqrt{21} + 4}{\sqrt{21} - 4},$$

numericky pak přIbližně $12,5277$.